KVANTOVÉ ŠTRUKTÚRY A TEÓRIA KATEGÓRIÍ
QUANTUM STRUCTURES AND CATEGORY THEORY

Roman Frič
Matematický ústav SAV, Grešákova 6, 040 01 Košice

Abstrakt Teória kategórií, jej postupy a konštrukcie sú vhodnými nástrojmi na skúmanie kvantových štruktúr a zovšeobecnenej pravdepodobnosti. Cieľom tohto článku je demonštrovať uvedenú tézu na viacerých príkladoch a tiež podnietiť ďalšie bádanie v tejto oblasti.

Summary The methods and constructions of category theory are suitable tools for studying quantum structures and generalized probability. The aim of the present paper is to support our claim via several examples and to motivate further research in this area.

1. ÚVOD

V literatúre je možné nájsť pomerne veľa matematických štruktúr, ktoré modelujú rôzne pravdepodobnostné javy a deje kvantového i fuzzy charakteru, spomeňme len [1], [2], [3], [4] [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Patria sem napríklad Booleove algebry, kvantové logiky, MV-algebry, efektové algebry, D-posety. Ich vlastnosti a vzájomné vzťahy sú predmetom mnohých článkov a viacerých monografií. Pri popisovaní jednotlivých štruktúr a ich vzájomných vzťahov sa často zachádza do detailov a s narastajúcim množstvom zavedených pojmov a dokázaných viet (aj v dôsledku nie vždy vhodnej a konzistentnej terminológie) akoby sa strácala podstata. V nasledujúcom texte sa pokúsime formulovať niektoré všeobecné postupy a konštrukcie, ktoré sa opakovane vyskytujú v rôznych prácach a mali by viesť k zovšeobecneniam i vytvoreniu vhodnejšej terminológie a príslušnej teórie. Prirodzene, budeme vychádzať z analýzy toho, ako sa pri skúmaní spomínaných štruktúr a ich využívaní v pravdepodobnosti bežne postupuje. Aby sme sa (predčasne a zbytočne) nezaplietli do nezmyselných špekulácií typu „Čo bolo skôr vajce, či sliepka?“, bez ohľadu na priority zostavíme z hľadiska budovania modelu zovšeobecnenej pravdepodobnosti zoznam kľúčových pojmov a princípov. Vzhľadom na súčasný stav v problematike očakávame, že podnieti rozsiahlejšiu odbornú diskusiu. Pojmy i princípy vysvetlíme na príkladoch a podľa možností využijeme pri modelovaní kvantových štruktúr. Záver tvorí aj niekoľko námetov pre ďalšie bádanie.

Začneme klasickým (kolmogorovovským) modelom $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$. Množinu $\mathbf{\Omega}$ tvoria elementárne javy, ktorých význam a úlohu analyzoval napríklad J. Łoś v práci [13]. Systém $\mathbf{S}$ podmnožín $\mathbf{\Omega}$ je modelom pravdepodobnostných javov. Principiálnou črtou systému $\mathbf{S}$ sú operácie s jeho prvkami (konjunkcia, disjunkcia, komplementácia). Ide o Booleovu algebru a $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ je vlastne konkrétna reprezentácia príslušnej Booleovej algebry javov. Keďže (nekonečná) Booleova algebra môže mať rôzne reprezentácie, hneď sa nastoľuje otázka voľby a úlohy množiny elementárnych javov. Napríklad, môžeme sa pýtať na dôsledky, ktoré má voľba $\mathbf{\Omega}$ na vlastnosti modelu $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$. Ďalším základným pojmom je pravdepodobnosť p. Je to funkcia na javoch, má vlastnosti objemu a čiastočne zachováva operácie s javmi. Existuje viacero interpretácií pojmu pravdepodobnosť javu (čím väčšia pravdepodobnosť javu, tým je jav menej prekvapivým, viac bežnejším, prináša menej nových informácií, či sa dokonca častejšie vyskytuje), ale my sa tejto otázke nebudeme venovať. Budeme sa skôr venovať technickým otázkam, napríklad vzájomným vzťahom pravdepodobnostných mier a javových polí a tomu, ako nám tieto vzťahy pomáhajú vo výbere vhodných matematických kategórií, t. j. objektov a morfizmov. Pojem náhodnej veličiny bude mať v našich úvahách kľúčový význam. Definuje sa ako zobrazenie $\mathbf{\Omega}$ do reálnej osi R, ktoré je merateľné vzhľadom na $\mathbf{S}$ a borelovské podmnožiny $\mathbf{B}(R)$ reálnej osi. Ide o zdanlivo málo hovoriacu definíciu, no v skutočnosti predstavuje spôsob konštrukcie pravdepodobnostných priestorov typu $(R, \mathbf{B}(R), p)$ a z hľadiska teórie kategórií vlastne morfizmus, a teda vôbec najdôležitejšiu vec! Poznamenajme, že každá náhodná veličina vytvára zobrazenie $\mathbf{B}(R)$ do $\mathbf{S}$ (nazýva sa pozorovateľnou) a ďalšie zobrazenie (nazýva sa distribúciou), ktoré každej pravdepodobnostnej miere na $\mathbf{S}$ priradí pravdepodobnostnú mieru na $\mathbf{B}(R)$. Tieto dve zobrazenia majú vzájomne duálny charakter a sú z hľadiska teórie kategórií veľmi zaujímavé. Ako uvádza M. Loève v [14], hlavným objektom pravdepodobnosti sú náhodné funkcie (systémy náhodných veličín) – vlastne ich vhodné triedy ekvivalencií. Z hľadiska teórie kategórií ide o novú kategóriu, v ktorej sa objektmi stávajú vhodné morfizmy pôvodnej kategórie. Ukazuje sa, že aj ďalšie modely pravdepodobnosti možno popísať podobným spôsobom. Prirodzenými kandidátmi do nášho zoznamu pojmov sú: *systémy javov* – sú to vhodné algebrické štruktúry (javy a operácie s javmi), ďalej *pravdepodobnosti na javoch* – sú to zobrazenia z javov do intervalu [0, 1], ktoré čiastočne prevádzajú operácie s javmi na operácie s číslami a nakoniec sú to *pozorovateľné* (či ich systémy), ktoré umožňujú prechod od jedného systému javov ku inému systému javov. Na zozname princípov bude na prvom mieste hľadanie vhodných *kategórií*, t. j. objektov a morfizmov medzi objektmi. Ďalšie princípy uvedené v časti 2 naznačujú, ako budeme postupovať pri zovšeobecňovaní klasického modelu.

Vzhľadom na rôznorodosť modelov pravdepodobnosti bude vhodné pracovať s viacerými kategóriami a pomocou *funktorov* študovať vzťahy medzi nimi.

2. ZOZNAM POJMOV

2.1 Javy a operácie s javmi

O stochastických dejoch získavame informácie pomocou experimentov. Rovnako ako v klasickom prípade, tak aj pri ich zovšeobecnení hľadáme nejaké operácie s javmi, čo by umožňovalo komplexnejšie skúmať daný dej pomocou zložených výrokov o výsledkoch experimentov. Triviálne potrebujeme istý a nemožný jav, ale voči klasickým booleovským operáciám môžeme uvažovať aspoň o dvoch zovšeobecneniach: operácie s javmi môžu byť čiastočné a samotné javy môžu mať fuzzy charakter.

Aby sme mohli pracovať s javmi, tak ich reprezentujeme prostredníctvom vhodného systému atribútov. V klasickom prípade jav reprezentujeme ako charakteristickú funkciu, ktorá nadobúda hodnotu 1 na množine tých atribútov (elementárnych javov), ktoré jav má a nadobúda hodnotu 0 na množine tých atribútov, ktoré jav nemá. Podľa J. Łośa v [13] začíname s nejakým súborom základných javov, tieto reprezentujeme a doplníme na pole (či σ-pole), všetko vzhľadom na zvolený systém atribútov (ultrafiltrov či elementárnych javov; atribúty ako vhodné spoločné vlastnosti základných javov „zabezpečuje“ experimentátor). Teda začneme s množinou $\mathbf{\Omega}$, nejakým systémom $\mathbf{S}_0$ jej podmnožín a ten doplníme na generované pole či σ-pole **S**. Takto utvorené pole javov **S** je uzavreté vzhľadom na booleovské operácie. Pri zovšeobecňovaní začneme so základným súborom $\mathbf{S}_0$ fuzzy podmnožín $\mathbf{\Omega}$, pričom hodnota každého atribútu daného javu je vyjadrená číslom z intervalu [0, 1], ktoré udáva, ako silne jav tento atribút má. Podľa zvoleného typu modelu zovšeobecnenej pravdepodobnosti sa operácie v rámci jedného atribútu riadia určitou logikou (napríklad łukasiewiczovskou) a základný systém javov $\mathbf{S}_0$ doplníme na minimálny systém všetkých javov **S**, ktorý je uzavretý na zvolené čiastočné operácie (napríklad v D-posetoch či efektových algebrách) či úplné algebrické operácie (napríklad v MV-algebrách). Naše javy potom závisia od zvolenej množiny atribútov $\mathbf{\Omega}$ od zvolenej logiky týchto atribútov a od zvolených operácií s javmi. Takáto konštrukcia javov je charakterizovaná tzv. kogenerátorom (v klasickom prípade Booleovou algebrou {0, 1}, pri zovšeobecnení napr. intervalom [0, 1] s vhodnou štruktúrou: łukasiewiczovskou v prípade MV-algebier či diferenčnou v prípade D-posetov), ktorý popisuje logiku atribútov a kategóriou, v rámci ktorej kogenerátor vygeneruje systém všetkých javov **S**. Ďalšie podrobnosti čitateľ nájde v časti 2.3 pod heslom evaluačná kategória.

2.2 Pozorovateľné

V klasickej pravdepodobnosti sa pojem pozorovateľnej explicitne nezavádza. Nech f je náhodná veličina, t. j. zobrazenie $\mathbf{\Omega}$ do R také, že pre každú borelovsky merateľnú podmnožinu B je $f^{\leftarrow}(B)=\{\omega\in\mathbf{\Omega}; f(\omega)\in B\}$ (teda jej vzor) **S**-merateľnou množinou. Takto dostávame zobrazenie javového poľa $\mathbf{B}(R)$ do javového poľa **S**. Pretože toto zobrazenie zachováva množinové operácie (vzor zjednotenia je zjednotením vzorov, vzor doplnku je doplnkom vzoru a podobne), je to vlastne booleovský homomorfizmus. Toto je závažný fakt!

Obrazom javového poľa $\mathbf{B}(R)$ je javové podpole $f^{\leftarrow}(\mathbf{B}(R))$ javového poľa **S** a $f^{\leftarrow}$ zabezpečuje (často neúplný) prenos informácií medzi týmito poliami javov. Napríklad, ak p je pravdepodobnosť na **S**, tak kompozícia $p\circ f^{\leftarrow}$ je pravdepodobnosťou na $\mathbf{B}(R)$. Pritom ak $f^{\leftarrow}(A)=f^{\leftarrow}(B)$, tak pre každú pravdepodobnosť p na **S** samozrejme platí $p(f^{\leftarrow}(A))=p(f^{\leftarrow}(B))$. Možno povedať, že $f^{\leftarrow}$ je akýmsi informačným kanálom, ktorý transformuje pravdepodobnosti na **S** na pravdepodobnosti na $\mathbf{B}(R)$. S tým súvisí aj problém izomorfizmu či ekvivalencie pozorovateľných (ako informačných kanálov). Ak pracujeme len s jednou pozorovateľnou $f^{\leftarrow}$, tak záleží len na $f^{\leftarrow}(\mathbf{B}(R))$ a na zúžení p na toto pole. Ak pracujeme s viacerými pozorovateľnými $f_t^{\leftarrow}, t\in T$, tak záleží na poli **S** a jeho príslušných podpoliach.

Vzhľadom na to, že každá náhodná veličina f vytvára pozorovateľnú $f^{\leftarrow}$, prirodzene vzniká otázka, za akých predpokladov možno každý homomorfizmus h typu pozorovateľná reprezentovať ako $f^{\leftarrow}$ pre nejakú náhodnú veličinu f. Odpoveď je naznačená v časti 3.3. Podrobnosti možno nájsť v prácach [15] a [16].

2.3 Pravdepodobnosť

V klasickom prípade má pravdepodobnosť p na poli **S** odlišnú povahu ako zobrazenie typu $f^{\leftarrow}$. Naozaj, p zachováva operácie s javmi len čiastočne: aditivitu $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ vyžadujeme len pre disjunktné javy A a B. Zavedenie D-posetov (či ekvivalentne efektových algebier [17]) umožňuje vystihnúť podstatu: stačí axiomatizovať diferenciu (odčítanie B od A len v prípade ak B je obsiahnuté v A) a od p stačí požadovať subtraktivitu: $p(A\setminus B)=p(A)-p(B)$ v prípade, že B je obsiahnuté v A. Takto je možné pole javov považovať za špeciálny D-poset a pravdepodobnosť za špeciálnu subtraktívnu funkciu. V D-posetoch sa potom aj zobrazenia typu $f^{\leftarrow}$, aj pravdepodobnosti stávajú morfizmami (zachovávajú diferenciu a nulárne operácie, t. j. konštanty). To je naozaj systémový krok. Na jednej strane aj slabšie požiadavky (subtraktivita miesto aditivity) na mieru zaručujú, že pravdepodobnosť v prípade klasických množinových polí ostáva pravdepodobnosťou, ale pravdepodobnosť ako nástroj na vyjadrenie neurčitosti a na počítanie s ňou sa „legalizuje“ v rámci kategoriálneho jazyka. Toto umožňuje využívať aparát teórie kategórií v podstatne väčšej oblasti teórie pravdepodobnosti než doteraz. To sa samozrejme týka aj klasického prípadu, aj prípadu zovšeobecnenej pravdepodobnosti.

Ďalším systémovým krokom je dôsledné uplatňovanie množiny **P** všetkých pravdepodobností na danom poli javov ako „arbitra". Napríklad dva javy, ktoré nemožno rozlíšiť pomocou žiadnej pravdepodobnosti, by sa mali stotožniť (táto zásada je explicitne formulovaná napríklad D. Foulisom v práci [4]). Rovnako, postupnosť $\{A_n\}$ javov by mala kanonicky konvergovať k javu A práve vtedy, ak $p(A) = \lim p(A_n)$ pre každú pravdepodobnosť p na danom poli javov. Táto konvergencia sa ukazuje naozaj ako kanonická. Ako už pred mnohými rokmi navrhoval J. Novák v práci [18], σ-aditivitu pravdepodobnostných mier možno nahradiť sekvenčnou spojitosťou voči tejto kanonickej konvergencii a pri zovšeobecnení na fuzzy javy vlastne sekvenčná spojitosť miery je garantovaná Lebesgueovou dominantnou konvergenčnou vetou. Podrobnosti možno nájsť v prácach [19] a [20]. Bude o tom bližšie pojednané v časti 3.4.

2.4 Objekty

Z toho, čo sme doteraz uviedli, rysujú sa tri nasledujúce atribúty objektu podstatné v teórii pravdepodobnosti:

1. objekt je tvorený javmi a na javoch sú vhodné operácie;
2. existuje vhodný jednoduchý objekt ako základný stavebný kameň a ostatné objekty sú z neho utvorené nejakým kanonickým spôsobom;
3. pre každý objekt existuje dostatočne veľa stavov, ktoré rozlišujú javy.

Je nutné zdôrazniť, že práve teória kategórií umožňuje zabezpečiť takéto atribúty pomocou jednoduchej kanonickej konštrukcie. Podľa prvého atribútu budeme hľadať vhodnú algebrickú štruktúru a podľa druhého atribútu príslušný jednoduchý objekt – kogenerátor. Systém prípustných zobrazení z objektu javov do kogenerátora vytvorí projektívny kužeľ nad objektom a pomocou kužeľa prenesieme do javov všetko podstatné ako iniciálnu štruktúru. V prípade kolmogorovovského modelu bude kogenerátorom dvojprvková Booleova algebra {0, 1}, projektívnym kužeľom bude systém booleovských homomorfizmov do {0, 1} – tie budú reprezentovať elementárne javy a pomocou nich aj rozlíšime javy. Objektmi budú v tomto prípade množinové polia – sú to podobjekty mocnín kogenerátora {0, 1}. Ako sme naznačili, interval [0, 1] ako kanonický D-poset je výhodným zovšeobecnením kogenerátora {0, 1}, pritom interval [0, 1] kogeneruje zovšeobecnené javové polia, ktoré modelujú zložitejšie pravdepodobnostné deje. To poukazuje na potrebu upustiť od dvojhodnotovej logiky a pripustiť fuzzy logiku.

Zdanlivo ťažšie je upustiť od jedinej základnej pravdepodobnosti p v kolmogorovovskom modeli $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$. Možným riešením je rozumieť pod objektom javy spolu s vhodným projektívnym kužeľom z objektu javov do kogenerátora. V tomto klasickom prípade kogenerátorom bude interval [0, 1] a kužeľ bude pozostávať z dvojhodnotových mier (reprezentujúcich body množiny $\mathbf{\Omega}$) a zvolenej pravdepodobnosti p. Extrémnym prípadom bude merateľný priestor $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ bez zvolenej pravdepodobnosti p a iným extrémnym prípadom budú javy spolu s kužeľom všetkých pravdepodobností! Toto riešenie by umožňovalo aj vhodne zovšeobecniť pojem náhodnej veličiny ako informačného kanála medzi kužeľmi daných dvoch objektov a pojem pozorovateľnej ako informačného kanála medzi javmi dvoch objektov s kompatibilnými kužeľmi. V záverečnej časti tohto článku spomenieme kategoriálnu konštrukciu, pomocou ktorej sa morfizmy jednej kategórie prevedú na objekty novej kategórie.

2.5 Morfizmy

Jednoznačným kandidátom na morfizmus je niečo, čo formalizuje spomínaný informačný kanál medzi objektmi. V klasickom modeli prichádza do úvahy merateľné zobrazenie f z priestoru $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$ do priestoru $(\Xi, \mathbf{T}, q)$, ktoré „zachováva mieru", t. j. $q(A) = p\left(f^{\leftarrow}(A)\right)$ pre všetky $A \in \mathbf{T}$. Avšak predmetom záujmu klasickej pravdepodobnosti sú náhodné veličiny a náhodné funkcie, t. j. Ξ je nejaká mocnina reálnej osi, $\mathbf{T}$ sú príslušné borelovské množiny a q je príslušná distribučná pravdepodobnosť. To by mohlo viesť k prílišnému ochudobneniu teórie (ak Ξ nie je mocnina reálnej osi, tak neexistujú morfizmy). Riešenie je jednoduché: morfizmami budú všetky „mieru zachovávajúce merateľné zobrazenia", ale pre každý objekt $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$ vytvoríme aj príslušnú kategóriu (comma category) náhodných veličín.

V prácach [5], [6], [7] S. Guddera a S. Bugajského (pozri aj ďalšie tam citované práce) je popísané podstatne lepšie riešenie. Informačný kanál medzi dvomi objektmi bude zobrazenie a množiny $M_1^+(\mathbf{\Omega})$ všetkých pravdepodobnostných mier na objekte $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ do množiny $M_1^+(\Xi)$ všetkých pravdepodobnostných mier na objekte $(\Xi, \mathbf{T})$, ktoré spĺňa istú technickú podmienku (prenášanie informácií). Táto podmienka má niekoľko ekvivalentných vyjadrení, je zovšeobecnením klasického prípadu a je vhodná aj pre zovšeobecnenie (na D-posety a s nimi ekvivalentné efektové algebry). Podrobnejšie informácie možno nájsť v práci [21]. Poznamenajme, že na rozdiel od klasického prípadu, zobrazenie a môže zobraziť elementárny jav $\omega \in \mathbf{\Omega}$ do netriviálnej miery na $(\Xi, \mathbf{T})$. Toto zobrazenie (spolu s príslušnými duálnymi pojmami) umožňuje tiež modelovať fuzzy a kvantové situácie a ukazuje sa, že je vhodným kandidátom na morfizmus v základnej kategórii zovšeobecnenej pravdepodobnosti.

2.6 Konštrukcie

Pomocným kritériom pri hľadaní vhodných kategórií by mohla byť ich uzavretosť na typické kategoriálne konštrukcie. V klasickom prípade ide napríklad o prechod od poľa javov ku generovanému σ-poľu javov, možnosť konštruovať súčiny (duálne kosúčiny) a niektoré ďalšie.

Vzhľadom na limitné tvrdenia v pravdepodobnosti musíme predpokladať vhodnú „spočítateľnú úplnosť“ poľa javov. Ukazuje sa, že množinové σ-polia tvoria reflexívnu podkategóriu kategórie množinových polí a že množinové pole $\mathbf{S}$ a generované σ-pole $\sigma(\mathbf{S})$ majú rovnaké pravdepodobnostné miery. Z tohto pohľadu predpoklad σ-úplnosti neznamená žiadnu stratu informácií. Podobne, každý merateľný priestor $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ možno nahradiť (jednoznačne) iným merateľným priestorom $\left(\mathbf{\Omega}^*, \mathbf{S}^*\right)$ tak, že $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{\Omega}^*$ a oba priestory sú z hľadiska morfizmov (pozorovateľných či duálne náhodných veličín) ekvivalentné, pričom prechod od $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ ku $\left(\mathbf{\Omega}^*, \mathbf{S}^*\right)$ je tiež reflexiou a v takto skonštruovanej reflexívnej podkategórii platí dualita (duálny izomorfizmus) medzi pozorovateľnými a náhodnými veličinami. Poznamenajme, že pre reálnu os R platí $R = R^*$ a $\mathbf{B}(R) = \mathbf{B}\left(R^*\right)$. Tieto reflexie (nezáleží na poradí) umožňujú nahradiť každé množinové pole $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ ekvivalentným poľom $\left(\mathbf{\Omega}^*, \sigma\left(\mathbf{S}^*\right)\right)$, na ktorom možno robiť „limitnú teóriu pravdepodobnosti“. Ide o rovnaký typ zúplnenia ako je prechod od racionálnych čísiel ku reálnym číslam či od metrického priestoru k jeho zúplneniu. Ukazuje sa (pozri [16]), že obe reflexie možno urobiť aj pre vhodné D-posety (ekvivalentne pre efektové algebry).

Rovnako dôležité sú kategoriálne súčiny (duálne kosúčiny). Ako je známe, tieto umožňujú prechod od jednotlivých náhodných veličín ku náhodným vektorom či náhodným funkciám (procesom). Opätovne, vhodné D-posety (ekvivalentne efektové algebry) tiež umožňujú kategoriálny súčin (duálne kosúčin).

3 ZOZNAM PRINCÍPOV

3.1 Kategoriálne metódy

Pre matematika, nie špecialistu v teórii kategórií sú kategoriálne metódy užitočné aspoň v dvoch smeroch. Jednak umožňujú nadhľad v jeho materskej disciplíne, jednak tiež pohľad do iných častí matematiky.

V prvom prípade ide napríklad o zhodnotenie viacročných aktivít a partikulárnych vedomostí. Často tak, ako sa udiali v čase, možno bez hľadania vnútornej logiky, invariantov, skrytých dôsledkov niektorých tvrdení a podobne. V druhom prípade ide napríklad o prekonávanie časovej a jazykovej bariéry, lebo zvládnuť novú (ďalšiu) disciplínu spravidla znamená zvládnuť pojmy, terminológiu, značenie, protipríklady a uvedomiť si súvislosti i podstatu dôležitých viet. Práve kategoriálne metódy v oboch prípadoch poukazujú na podstatné veci v príslušnej disciplíne, ako aj na spoločné či podobné konštrukcie (inak pomenované), prípadne vzájomné vzťahy medzi rôznymi štruktúrami. Všetko toto v konečnom dôsledku prináša podnety ďalšieho bádania.

Opodstatnenosť predchádzajúcich úvah možno demonštrovať na príklade pojmu náhodnej veličiny, ktorého porozumenie na základe vysvetlení uvádzaných v rôznych učebniciach pravdepodobnosti spôsobuje značné problémy nielen študentom, ale zväčša tiež erudovaným matematikom, nie špecialistom v teórii pravdepodobnosti. Určite by prospelo, keby sa obom skupinám – študentom i erudovaným matematikom – poukázalo na vzťah medzi f a $f^{\leftarrow}$ so zreteľom na združovanie (opakovanie) jednoduchých pokusov a ich modelovanie pomocou súčinov (napr. Bernoulliho schéma). Všade tam totiž náhodné veličiny pôsobia ako morfizmy a popisujú dynamiku či prenos informácií medzi objektmi. To však len potvrdzuje oveľa všeobecnejšie tvrdenie, podľa ktorého kategoriálne metódy v každom štádiu bádania umožňujú poznávaciu skratku – formulovanie úloh a cieľov, využívanie matematických štruktúr, uvedomovanie si súvislostí i analógií a napokon tiež abstraktný zdvih. Všetky tieto aspekty by mal mať na pamäti každý, kto sa venuje kvantovým štruktúram, aj preto, že kategoriálne metódy umožňujú (pomocou funktorov) popisovať vzťahy medzi jednotlivými modelmi a teóriami. V neposlednom rade kategoriálny jazyk šípok (morfizmov) a diagramov prináša prekvapivé zjednodušenie i prehľadnosť tvrdení a ich dôkazov.

3.2 Výber definície

Pri zovšeobecňovaní v matematike narážame na problém zachovávania či nezachovávania ekvivalencie. Ak máme niekoľko ekvivalentných vlastností (charakterizácií, podmienok…), pomocou ktorých je vymedzený nejaký matematický pojem, tak za jeho definíciu môžeme zvoliť hociktorú z nich. Pri zovšeobecňovaní niektoré vlastnosti nemusia byť ekvivalentné a (aj) z toho dôvodu by bolo vhodné definovať pojem pomocou tej vlastnosti, ktorá najlepšie „prežije“ zovšeobecnenie. Účelnosť zavedenia pojmu je spravidla v tom, že umožňuje (ako predpoklad) nejakú konštrukciu, platnosť nejakého tvrdenia, vety. Preventívne by bolo možné začať nie s nejakou explicitnou definíciou, ale so špecifikovaním tvrdenia, ktoré má platiť a dodatočne hľadať vhodnú nutnú a postačujúcu podmienku.

Kategoriálne konštrukcie a definície spĺňajú vyššie uvedené požiadavky. *„Kategoriálny súčin objektov je najlepší objekt (ak vôbec existuje) umožňujúci projekcie do všetkých zložkových objektov.“ „Dva objekty sú izomorfné, ak existujú dva opačným smerom idúce morfizmy, ktorých zloženia sú jednotkovými morfizmami.“* Teda najprv formulujeme, čo chceme dostať, potom sa presvedčíme, či je nami navrhovaná definícia v danej kategórii naozaj vyhovujúca! Takto by sa malo postupovať pri zavádzaní rôznych súčinov (kosúčinov), podobjektov a ďalších pojmov aj v kvantových štruktúrach. Napríklad, definovať, že dva lineárne priestory U a V sú izomorfné, ak existuje prosté zobrazenie U na V také, že zachováva lineárne kombinácie, je mätúce!

Predchádzajúce úvahy chceme využiť aj pri zavádzaní niektorých pojmov v časti 3.

3.3 Reprezentácia, dualita, evaluačná kategória

V klasickom prípade Booleovu algebru javov reprezentujeme ako množinové pole a každý homomorfizmus medzi dvoma Booleovými algebrami sa snažíme reprezentovať v tvare $f^{\leftarrow}$, pričom f je vhodné merateľné zobrazenie medzi príslušnými množinovými poliami. Dualita znamená, že nájdeme podkategóriu množinových polí tak, že existujú jednoznačné prechody medzi Booleovými algebrami a množinovými poliami, a že aj medzi homomorfizmami a merateľnými zobrazeniami sú tieto prechody jednoznačné. Booleove algebry predstavujú bezbodovú matematiku a užitočnosť reprezentácie je v tom, že stochastickú analýzu vieme robiť pre bodové funkcie a nie priamo pre homomorfizmy. Ak chceme, aby sa aj pravdepodobnostné miery stali morfizmami, tak miesto kategórie množinových polí musíme pracovať s voľnejšou kategóriou D-posetov. Body (t. j. elementárne javy) sú homomorfizmami do dvojprvkovej algebry $\{0, 1\}$, ale netriviálne pravdepodobnostné miery zobrazujú javy do intervalu $[0, 1]$ a nezachovávajú booleovské operácie s javmi, len diferenciu a konštanty. Každý jav ako prvok a pôvodnej Booleovej algebry bude reprezentovaný ako evaluácia $\{ p(a) ; p \in M_1^+ \}$, pričom M_1^+ sú všetky pravdepodobnostné miery na pôvodnej Booleovej algebre. Takto reprezentované javy budú „žiť“ v novej, tzv. evaluačnej kategórii (v tomto prípade je to podkategória D-posetov kogenerovaných intervalom $[0, 1]$). Voľba vhodnej evaluačnej kategórie je realizovaná tak, aby v nej bolo možné dokázať potrebné tvrdenia a zároveň výhodne využívať príslušné kategoriálne konštrukcie. Ďalšie podrobnosti čitateľ nájde v práci [15].

3.4 Sekvenčná spojitosť

Ak pracujeme s nekonečnými objektmi, tak môžeme uvažovať diskrétnu štruktúru javov a pravdepodobnosť ako aditívnu funkciu alebo hľadať vhodnú spojitú štruktúru a uvažovať spojitú pravdepodobnosť. My sa budeme zaoberať druhou možnosťou.

J. Novák vo svojich prácach [18] a [22] navrhol modelovať spojitú pravdepodobnosť pomocou sekvenčnej konvergencie. Jeho myšlienky sú rozvinuté v prácach [15], [23], [19], [20], [21], [24], pričom sú využité kategoriálne metódy. Prvou zásadou je, že interval $[0, 1]$ ako kogenerátor svojou konvergenciou determinuje konvergenciu na javoch. Ak javy reprezentujeme ako funkcie s hodnotami v kogenerátore $[0, 1]$, tak vlastne pracujeme s mocninami $[0, 1]^X$, kde X je vhodná množina (elementárnych javov či pravdepodobnostných mier). Projekcie z $[0, 1]^X$ do $[0, 1]$ sú pravdepodobnostné miery. Na javoch tak získavame iniciálnu štruktúru vzhľadom na kužeľ projekcií. To znamená, že operácie s javmi a konvergencia na javoch je *bodová*. V práci [20] je ukázané, že prechod od monotónnej konvergencie k bodovej konvergencii a spojitosti nie je žiadnym obmedzením. Ak je aditívna miera na javoch spojitá voči monotónnej konvergencii (t. j. σ-aditívna), tak je sekvenčne spojitá voči bodovej konvergencii (opačne to platí triviálne). Aj homomorfizmy (pozorovateľné) sú sekvenčne spojité vzhľadom na bodovú konvergenciu, čo vyplýva z nasledujúcej úvahy. Nech $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ a $(\Xi, \mathbf{T})$ sú klasické merateľné priestory a nech f je merateľné zobrazenie z $\mathbf{\Omega}$ do Ξ, t. j. pre každú $A \in \mathbf{T}$ platí $f^{\leftarrow}(A) \in \mathbf{S}$. Merateľnosť f možno preformulovať pomocou kompozície $\chi_A \circ f = \chi_B$, $B = f^{\leftarrow}(A)$. Takto f generuje homomorfizmus $f^{\leftarrow}$ z $\mathbf{T}$ do $\mathbf{S}$ a tento homomorfizmus je automaticky sekvenčne spojitý vzhľadom na bodovú konvergenciu charakteristických funkcií merateľných množín. Klasická konvergencia postupnosti množín $\{ A_n \}$ je to isté ako bodová konvergencia príslušnej postupnosti charakteristických funkcií a kompozícia automaticky prevádza konvergentnú postupnosť $\{ A_n \}$ na konvergentnú postupnosť $\{ f^{\leftarrow}(A_n) \}$. Rovnaký dôvod platí aj pre zovšeobecnené javy, t. j. pre vhodné systémy funkcií do $[0, 1]$. Ďalším argumentom je Lebesgueova veta o dominantnej konvergencii aplikovaná na efekty (fuzzy javy): ak postupnosť merateľných funkcií s hodnotami v $[0, 1]$ bodovo konverguje k funkcii f, tak f je integrovateľná a príslušná postupnosť integrálov konverguje k integrálu funkcie f. Pri zovšeobecnených javoch budeme predpokladať sekvenčnú spojitosť zovšeobecnenej pravdepodobnosti vzhľadom na bodovú konvergenciu a Lebesgueova veta sa vlastne stane axiómou zovšeobecnenej pravdepodobnosti.

4. MODEL

V duchu predchádzajúcich úvah navrhujeme pri modelovaní zovšeobecnenej pravdepodobnosti použiť kategóriu D-posetov kogenerovanú intervalom $[0, 1]$ ako evaluačnú.

Objektmi teda budú systémy funkcií $\mathbf{F} \subseteq [0, 1]^X$ s prirodzenou D-posetovou štruktúrou (napríklad $u \leq v$, ak $u(x) \leq v(x)$ pre všetky $x \in X$) spolu s bodovou konvergenciou postupností. Z praktických dôvodov budeme predpokladať redukované systémy (t. j. ak $x \neq y$, tak existuje $u \in \mathbf{F}$ také, že $u(x) \neq u(y)$). Ak X je jednobodová množina, tak dostávame podobjekt intervalu $[0, 1]$.

Morfizmami budú sekvenčne spojité D-homomorfizmy. Každý bod $x \in X$ je vlastne morfizmom do $[0, 1]$ (definujeme $x(u) = u(x)$). Morfizmy do $[0, 1]$ sa nazývajú *stavy*. Na každom objekte teda existuje dosť stavov (ak $u \neq v$, tak existuje $x \in X$ taký, že $u(x) \neq v(x)$). Ak každý morfizmus do $[0, 1]$ je bodovým, tak $\mathbf{F}$ sa nazýva *sober*.

V práci [16] sa uvedená kategória označuje ako *ID-poset*. Dvojica $(X, \mathbf{F})$ sa nazýva *ID-merateľný priestor*. Nech $(X, \mathbf{F})$, $(Y, \mathbf{G})$ sú dva takéto merateľné priestory. Zobrazenie f z X do Y sa nazýva *merateľným***,** ak pre každé $u \in \mathbf{G}$ kompozícia $u \circ f$ je prvkom $\mathbf{F}$.

Každé merateľné zobrazenie f z X do Y generuje morfizmus $f^{\leftarrow}$ z $\mathbf{G}$ do $\mathbf{F}$, a ak $\mathbf{G}$ je sober, tak ku každému morfizmu h z $\mathbf{G}$ do $\mathbf{F}$ existuje jediné merateľné zobrazenie f také, že $f^{\leftarrow} = h$. Takto vzniká kategoriálna dualita medzi kategóriou ID-posetov a kategóriou sober ID-merateľných priestorov a merateľných zobrazení.

V práci [21] je dokázané, že každá zovšeobecnená náhodná veličina v zmysle Bugajského a Guddera, t. j. vhodné zobrazenie z množiny všetkých pravdepodobnostných mier $M_1^+(\mathbf{\Omega})$ na klasickom merateľnom priestore $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S})$ do množiny $M_1^+(\Xi)$ všetkých pravdepodobnostných mier na klasickom merateľnom priestore $(\Xi, \mathbf{T})$ sa dá reprezentovať ako merateľné zobrazenie zo sober ID-merateľného priestoru do sober ID-merateľného priestoru. Toto umožňuje nasledujúci model zovšeobecnenej pravdepodobnosti.

Zovšeobecnenými javmi budú prvky nejakého ID-posetu, zovšeobecnenými pozorovateľnými budú sekvenčne spojité D-posetové homomorfizmy, zovšeobecnenými náhodnými veličinami budú ID-merateľné zobrazenia a stavmi budú sekvenčne spojité ID-posetové homomorfizmy do [0, 1]. Pritom ide o zovšeobecnenie klasických pojmov pravdepodobnosti.

Ak fixujeme základný klasický pravdepodobnostný priestor $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{S}, p)$, tak množinu všetkých náhodných funkcií (t. j. merateľných zobrazení do mocnín reálnej osi) môžeme premeniť na objekty novej kategórie. Ide o takzvanú koma kategóriu. Morfizmami v nej budú (distribučnú) mieru zachovávajúce merateľné zobrazenia medzi príslušnými mocninami reálnych osí. Problematický je izomorfizmus dvoch náhodných veličín. Mohlo by sa stať, že dve náhodné veličiny sú izomorfné a pritom sú rôzne na všetkých elementárnych javoch. Pritom za ekvivalentné sa spravidla považujú dve náhodné veličiny, len ak sú rôzne na množine s nulovou pravdepodobnosťou. Úvahy tohto druhu prekračujú rámec nášho článku, ale kategoriálne postupy by aj v tomto prípade mali byť prínosom.

5. FUNKTORY

V práci [16] sú popísané dva epireflektory. Jeden priradí každému ID-merateľnému priestoru jeho „sobrifikáciu“, druhý každému ID-posetu jeho sekvenčné zúplnenie. Ako je známe, dualita medzi pozorovateľnými a náhodnými veličinami je založená na dvojici kontravariantných funktorov. Ďalšie funktory popisujú prechody medzi niektorými kvantovými štruktúrami na rovnakej nosnej množine. Napríklad ekvivalencia medzi efektovými algebrami a D-posetmi sa dá popísať ako kategoriálny izomorfizmus. Známa Butnariu-Klementova veta vlastne popisuje funktoriálne súvislosti medzi klasickými javmi a fuzzy javmi. Popísanie vzťahov medzi ďalšími kategóriami kvantových štruktúr túto problematiku určite sprehľadní.

6. NÁMETY

Na záver uvedieme niektoré podnety a námety pre ďalšie bádanie.

Kosúčiny bold algebier v kategórii D-posetov poskytujú jednoduchý model zovšeobecnenej pravdepodobnosti (porovnaj napríklad [25]). Chybou je, že tieto kosúčiny nemožno reprezentovať ako ID-posety, t. j. funkcie. Je možné nahradiť bodové stavy nejakými inými morfizmami tak, aby javy v kosúčine boli funkciami s hodnotami v [0, 1]?

Bolo by vhodné skonštruovať užitočné fuzzy náhodné veličiny z zmysle Bugajského-Guddera a vypracovať pre ne nejaké štatistické procedúry.

Bolo by dozaista zaujímavé študovať ID-posety s ďalšou operáciou násobenia a vytvoriť pre ne teóriu podmienených stredných hodnôt (pozri [26]), prípadne zovšeobecniť niektore ergodické konštrukcie (pozri [27], [28]).

LITERATÚRA

[1] Dvurečenskij, A. and Pulmannová, S.: New Trends in Quantum Structures, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.

[2] Cignoli, R., D´Ottaviano, I. M. L. and Mundici, D.: Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.

[3] Riečan, B. and Neubrunn, T.: Integral, Masure, and Ordering, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.

[4] Foulis, D. J.: Algebraic measure theory, Atti. Sem. Fis. Modena **48** (2000), 435 – 461.

[5] Gudder, S.: Combinations of observables, Internat. J. Theoret. Phys. **31** (2000), 695 – 704.

[6] Bugajski, S.: Statistical maps I. Basic properties, Math. Slovaca **51** (2001), 321–342.

[7] Bugajski, S.: Statistical maps II. Operational random variables, Math. Slovaca **51** (2001), 343–361.

[8] Foulis, D. J. and Bennett, M. K.: Effect algebras and unsharp quantum logics, Found. Phys. **24** (1994), 1331 – 1352.

[9] Kôpka, F. and Chovanec, F.: D-posets, Math. Slovaca **44** (1994), 21 – 34.

[10] Pták, P. and Pulmannová, S.: Orthomodular Structures as Quantum Logics, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

[11] Mundici, D. and Riečan, B.: Probability on MV-algebras, In: Handbook of Measure Theory (Editor: E. Pap), North-Holland, Amsterdam, 2001.

[12] Riečanová, Z.: Proper effect algebras admitting no states, Internat J. Theoret. Phys. **40** (2001), 1683 – 1691.

[13] Łoś, J.: Fields of events and their definition in the axiomatic treatment of probability, Studia Logica **9** (1960), 95 – 115 (Polish), 116 – 124 (Russian summary), 125 – 132 (English summary).

[14] Loève, M.: Probability Theory, (Third edition), D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1963.

[15] Frič, R.: Convergence and duality, Appl. Categorical Structures **10** (2002), 257 – 266.

[16] Papčo, M.: On measurable spaces and measurable maps, Tatra Mountains Math. Publ. (to appear).

[17] Chovanec, F, and Kôpka, F.: Difference posets in the quantum structures background, Int. J. Theoret. Phys. **39** (2000), 571 – 583.

[18] Novák, J.: Ueber die eindeutigen stetigen Eiwerterungen stetiger Funktionen, Czechoslovak Math. J. **8** (1958), 344 – 355.

[19] Frič, R.: Boolean algebras: convergence and measure, Topology Appl. **111** (2001), 139 – 149.

[20] Frič, R.: Łukasiewicz tribes are absolutely sequentially closed bold algebras, Czechoslovak Math. J. **52** (2002), 861 – 874.

[21] Frič, R.: Remarks on statistical maps and fuzzy (operational) random variables, Tatra Mountains Math. Publ. (to appear).

[22] Novák, J.: On sequential envelopes defined by means of certain classes of functions, Czechoslovak Mat. J. **18** (1968), 450 – 456.

[23] Frič, R.: a Stone-type duality and its applications to probability, Topology Proceedings **22** (1997), 125 – 137.

[24] Fric, R.: Duality for generalized events, Math. Slovaca (to appear).

[25] Frič, R.: Coproducts of D-posets and their applications to probability (submitted).

[26] M. Jurečková: On the conditional expectation on probability MV-algebras with product. Soft Computing **5** (2001), 381 – 385.

[27] J. Petrovičová: On the entropy of partitions in product MV-algebras. Soft Computing **4** (2000), 41 – 44.

[28] J. Petrovičová: On the entropy of dynamical systems in product MV-algebras. Fuzzy Sets and Systems **121** (2001), 347 – 351.

Práca vznikla v rámci projektu VEGA 2/3163/24